Infinitezimalna analiza

Jaka Kranjc

2. november 2009

Osnovna načela

- Uporabimo konstruktivno logiko, dokazi s protislovjem v splošnem niso veljavni.
- Naj bo $\mathcal{R}$ obseg z relacijo stroge linearne urejenosti $<$.
- Definirajmo $\Delta = \{\varepsilon\,;\, \varepsilon \in \mathcal{R}\,, \varepsilon^2 = 0\}$, klasično sledi $\Delta = \{0\}$, vendar lahko konstruktivno dokažemo le $\neg\neg(\Delta = \{0\})$.
- Za vsako funkcijo $f^\circ \in \mathcal{R}^{\mathcal{R}}$, vsak $x \in \mathcal{R}$ in vsak $\varepsilon \in \Delta$ velja $f(x+\varepsilon) = f(x) + f'(x)\varepsilon$, pri čemer je $f'(x) \in \mathcal{R}$ enolično določen.
- Naj bosta $a, b \in \mathcal{R}$.
  Če za vsak $\varepsilon \in \Delta$ velja $\varepsilon a = \varepsilon b$, potem sledi $a = b$.

Praktična uporaba

odvodi funkcij

- velja: $(x^4)' = 4x^3$

$$\begin{aligned}(x+\varepsilon)^4 - x^4 &= (x^4)'\varepsilon \\ &= x^4 + 4x^3\varepsilon + 6x^2\varepsilon^2 + 4x\varepsilon^3 + \varepsilon^4 - x^4 \\ &= 4x^3\varepsilon\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x^4)'\varepsilon = 4x^3\varepsilon \quad \Rightarrow \quad (x^4)' = 4x^3$$

Praktična uporaba

odvodi funkcij

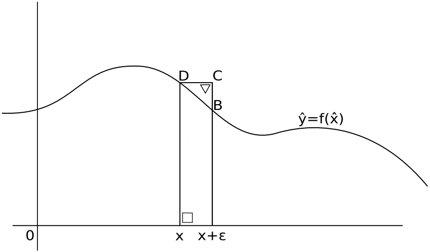
- velja: $x^{4\prime} = 4x^3$
- velja: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$$
\begin{aligned}
= \quad & (fg)(x+\varepsilon) - (fg)(x) = (fg)'(x)\varepsilon \\
= \quad & f(x+\varepsilon)g(x+\varepsilon) - f(x)g(x) \\
= \quad & (f(x) + f'(x)\varepsilon)(g(x) + g'(x)\varepsilon) - f(x)g(x) \\
= \quad & f(x)g(x) + f'(x)g(x)\varepsilon + f(x)g'(x)\varepsilon + f'(x)g'(x)\varepsilon^2 - f(x)g(x)
\end{aligned}
$$

$$
\Leftrightarrow \quad (fg)'(x)\varepsilon = (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\varepsilon \;\Rightarrow\; (fg)' = f'g + fg'
$$

Praktična uporaba

določeni integral



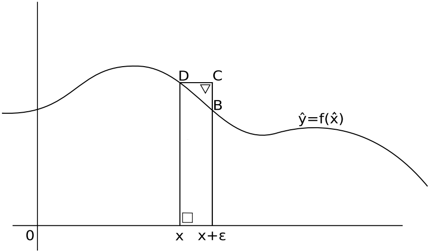
Naj bo $A(x)$ ploščina pod grafom $\hat{y} = f(\hat{x})$ funkcije f, omejena z osema $\hat{x} = 0, \hat{y} = 0$ in premico $\hat{x} = x$.

Vemo, da je $\quad A(x+\varepsilon) - A(x) = A'(x)\varepsilon$

in vidimo $\quad A(x+\varepsilon) - A(x) = \square - \nabla.$

Praktična uporaba

določeni integral



$\square = f(x)\varepsilon \qquad f(x+\varepsilon) - f(x) = f'(x)\varepsilon \qquad \nabla = \frac{1}{2} f'(x)\varepsilon\varepsilon = 0$

$A'(x)\varepsilon = \square - \nabla = f(x)\varepsilon \;\Rightarrow\; A' = f$

Načrt seminarja

1. Aksiomi infinitezimalne analize
2. Osnovne posledice
3. Uporaba:
    - odvodi in integrali
    - ploščine in prostornine
    - uporaba v fiziki (toplotna in valovna enačba)