

# Kompaktnost

To je najpomembnejša topološka lastnost. Prototip je zaprt interval  $[a, b]$ . Za vsak tak interval lahko iz vsakega odprtega pokritja izberemo končno podpokritje.

**Definicija 0.1.** Topološki prostor  $X$  je kompakten, če za vsako odprto pokritje za  $X$  obstaja končno podpokritje.

V resnici je dovolj kompaktnost preveriti na pokritjih, ki sestojijo iz baznih odprtih množic.

**Trditev 0.2.** Naj bo  $\mathcal{B}$  baza topološkega prostora  $X$ . Prostor  $X$  je kompakten natanko tedaj, ko za poljubno pokritje iz baznih odprtih množic obstaja končno podpokritje.

**Trditev 0.3.** Naj bo  $X$  kompakten topološki prostor, potem ima vsako zaporedje v  $X$  stekališče.

**Definicija 0.4.** Naj bo  $X$  topološki prostor in  $A \subseteq X$ . Pravimo, da je  $A$  kompaktna podmnožica, če je  $A$  z relativno topologijo kompakten prostor. Množica  $A$  je relativno kompaktna podmnožica, če je množica  $\overline{A}$  kompaktna.

**Trditev 0.5.**  $A \subseteq X$  je kompaktna natanko tedaj, ko za vsako družino odprtih množic v  $X$ , katere unija vsebuje  $A$ , obstaja končna poddružina, katere unija vsebuje  $A$ .

**Trditev 0.6.** Končna unija (relativno) kompaktnih množic je (relativno) kompaktna.

**Izrek 0.7.** Naj bo  $f : X \rightarrow Y$  zvezna in  $X$  kompakten topološki prostor, potem je  $f(X)$  kompaktna podmnožica v  $Y$ .

**Izrek 0.8.**

1. Če je  $A$  zaprta podmnožica v  $X$  in  $X$  kompakten prostor, potem je  $A$  kompaktna podmnožica.
2. Če je  $A$  kompaktna podmnožica v  $X$  in  $X \in T_2$ , potem je  $A$  zaprta podmnožica v  $X$ .

OPOMBA: Če je  $X$  kompakten in  $X \in T_2$ , potem je  $X$  regularen.

**Izrek 0.9.** Naj bo  $X$  kompakten topološki prostor in  $Y \in T_2$ . Potem je zvezna preslikava  $f : X \rightarrow Y$  tudi zaprta. Če je  $f$  injektivna, je  $f$  zaprta vložitev. Če je  $f$  bijektivna, je  $f$  homeomorfizem.

**Trditev 0.10.** Naj bo  $X \in T_2$  in  $A, B \subseteq X$  disjunktni kompaktni množici. Potem imata  $A$  in  $B$  disjunktni odprti okolici.

## Kompaktni metrični prostori

**Definicija 0.11.** Če je  $(X, d)$  metrični prostor in  $A \subseteq X$ , je  $\text{diam}(A) = \sup_{x, y \in A} d(x, y)$  diameter oziroma premer množice  $A$ . Množica  $A$  je omejena, če je  $\text{diam}(A) < \infty$ . Množica  $A$  je popolnoma omejena, če lahko za vsak  $\varepsilon > 0$  pokrijemo  $A$  s končno mnogo odprtimi kroglami polmera  $\varepsilon$ .

**Trditev 0.12.** Če je  $X$  popolnoma omejen, je  $X$  omejen in separabilen.

**Izrek 0.13.** Naj bo  $(X, d)$  metrični prostor. Naslednje trditve so ekvivalentne:

1.  $X$  je kompakten.
2. Vsako zaporedje v  $X$  ima stekališče.
3.  $X$  je popolnoma omejen in poln.

OPOMBA:  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  je kompakten natanko tedaj, ko je  $X$  omejen in zaprt.

OPOMBA:  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  je relativno kompakten natanko tedaj, ko je  $X$  omejen.

**Trditev 0.14.** Naj bo  $X$  kompakten topološki prostor in  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna funkcija, potem je  $f$  omejena ter zavzame tako maksimum kot tudi minimum.

**Izrek 0.15.** Naj bo  $(X, d)$  kompaktni metrični prostor in  $\mathcal{U}$  odprto pokritje za  $X$ , potem obstaja  $\delta > 0$ , da za poljubno podmnožico  $A \subseteq X$  z  $\text{diam}(A) < \delta$  obstaja  $V \in \mathcal{U}$ , da je  $A \subseteq V$ .

OPOMBA: Število  $\delta$  imenujemo Lebesgueovo število pokritja  $\mathcal{U}$ .

OPOMBA: Če sta  $(X, d_X)$  in  $(Y, d_Y)$  metrična prostora,  $X$  kompakten prostor in  $f : X \rightarrow Y$  zvezna preslikava, potem je  $f$  enakomerno zvezna.

**Definicija 0.16.** Topološki prostor  $X$  je lokalno kompakten, če ima vsak  $x \in X$  kakšno kompaktno okolico.

- Če je  $X$  kompakten, potem je  $X$  lokalno kompakten.
- $\mathbb{R}^n$  ni kompakten, je lokalno kompakten.
- $X = (C(I), \|\cdot\|_\infty)$  ni lokalno kompakten.

**Trditev 0.17.** Če je  $X$  lokalno kompakten in  $X \in T_2$ , za vsak  $x \in X$  in vsako okolico  $V$  za  $x$  obstaja odprta relativno kompaktna okolica  $W$  za  $x$ , da velja  $x \in W \subseteq \overline{W} \subseteq \text{int}(V)$ . Vsaka točka v  $X$  ima bazo kompaktnih okolici.

OPOMBA: Če je  $X$  lokalno kompakten in  $X \in T_2$ , potem je  $X$  regularen.

OPOMBA: Lokalna kompaktnost ni dedna.

**Trditev 0.18.** Če je  $X$  lokalno kompakten,  $X \in T_2$  in  $A \subseteq X$  odprta ali zaprta, potem je  $A$  lokalno kompaktna.

OPOMBA: Če je  $X$  lokalno kompakten,  $X \in T_2$  in  $A = U \cap Z$ , kjer je  $U$  odprta in  $Z$  zaprta, potem je  $A$  lokalno kompaktna.

OPOMBA: Množico oblike  $U \cap Z$  imenujemo lokalno zaprta.

**Trditev 0.19.** Če je  $X$  lokalno kompakten in  $f : X \rightarrow Y$  zvezna in odprta preslikava, potem je  $f(X)$  lokalno kompaktna množica.

**Izrek 0.20.** Kompaktnost je multiplikativna topološka lastnost, lokalna kompaktnost je samo končno-multiplikativna topološka lastnost.