Kompaktnost

To je najpomembnejša topološka lastnost. Prototip je zaprt interval $[a, b]$. Za vsak tak interval lahko iz vsakega odprtega pokritja izberemo končno podpokritje.

Definicija 1: Topološki prostor X je kompakten, če za vsako odprto pokritje za X obstaja končno podpokritje.

V resnici je dovolj kompaktnost preveriti na pokritjih, ki sestojijo iz baznih odprtih množic.

Trditev: Naj bo $\mathcal{B}$ baza topološkega prostora X. Prostor X je kompakten natanko tedaj, ko za poljubno pokritje iz baznih odprtih množic obstaja končno podpokritje.

Trditev: Naj bo X kompakten topološki prostor, potem ima vsako zaporedje v X stekališče.

Definicija 2: Naj bo X topološki prostor in $A \subseteq X$. Pravimo, da je A kompaktna podmnožica, če je A z relativno topologijo kompakten prostor. A je relativno kompaktna podmnožica, če je $\bar{A}$ kompaktno.

Trditev: $A \subseteq X$ je kompaktna natanko tedaj, ko za vsako družino odprtih množic v X, katere unija vsebuje A, obstaja končna poddružina, katere unija vsebuje A.

Trditev: Končna unija (relativno) kompaktnih množic je (relativno) kompaktna.

Izrek: Naj bo $f : X \to Y$ zvezna in X kompakten topološki prostor, potem je $f(X)$ kompaktna podmnožica v Y.

Izrek:

1. Če je A zaprta podmnožica v X in X kompakten prostor, potem je A kompaktna podmnožica.
2. Če je A kompaktna podmnožica v X in $X \in T_2$, potem je A zaprta podmnožica v X.

Opomba: Če je X kompakten in $X \in T_2$, potem je X regularen.

Izrek: Naj bo X kompakten topološki prostor in $Y \in T_2$. Potem je $f : X \to Y$, ki zvezna, tudi zaprta. Če je f injektivna, je f zaprta vložitev. Če je f bijektivna, je f homeomorfizem.

Trditev: Naj bo $X \in T_2$ in $A, B \subseteq X$ disjunktni kompaktni množici. Potem imata A in B disjunktni odprti okolici.

Kompaktni metrični prostori

Definicija 3: Če je (X, d) metrični prostor in $A \subseteq X$, je $diam(A) = sup_{x,y \in A} d(x, y)$ diameter oziroma premer množice A. Množica A je omejena, če je $diam(A) < \infty$. Množica A je popolnoma omejena, če lahko za vsak $\epsilon > 0$ pokrijemo A s končno mnogo odprtimi kroglami polmera ϵ.

Trditev: Če je X popolnoma omejen, je X omejen in separabilen.

Izrek: Naj bo (X, d) metrični prostor. Naslednje trditve so ekvivalentne:

1. X je kompakten.
2. Vsako zaporednje v X ima stekališče.
3. X je popolnoma omejen in poln.

Opomba: $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompakten natanko tedaj, ko je X omejen in zaprt.

Opomba: $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je relativno kompakten natanko tedaj, ko je X omejen.

Trditev: Naj bo X kompakten topološki prostor in $f : X \to \mathbb{R}$ zvezna, potem je f omejena in ima maksimum ter minumum.

Izrek: Naj bo (X, d) kompaktni metrični prostor in $\mathcal{U}$ odprto pokritje za X, potem obstaja $\delta > 0$, da za poljubno podmnožico $A \subseteq X$ z $diam(A) < \delta$ obstaja $V \in \mathcal{U}$, da je $A \subseteq V$.

Opomba: Število δ imenujemo Lebesgueovo število pokritja $\mathcal{U}$.

Opomba: Če sta (X, d_X) in (Y, d_Y) metrična prostora, X kompakten prostor in $f : X \to Y$ zvezna, potem je f enakomerno zvezna.

Definicija 4: Topološki prostor X je lokalno kompakten, če ima $\forall x \in X$ kakšno kompaktno okolico.

- Če je X kompakten, potem je X lokalno kompakten.
- $\mathbb{R}^n$ ni kompakten, je lokalno kompakten. $x \in \mathbb{R}^n$ $x \in (\bar{K})(x, 1)$
- $X = (C(I), \| \cdot \|_\infty)$ ni lokalno kompaken.

Trditev: Če je X lokalno kompakten in $X \in T_2$, za $\forall x \in X$ in vsako okolico V za x obstaja odprta relativno kompaktna okolica W za x, da velja $x \in W \subseteq \bar{W} \subseteq Int(V)$. Vsaka točka v X ima bazo kompaktnih okolic.

Opomba: Če je X lokalno kompakten in $X \in T_2$, potem je X regularen.

Opomba: Lokalna kompaktnost ni dedna.

Trditev: Če je X lokalno kompakten, $X \in T_2$ in $A \subseteq X$ odprta ali zaprta, potem je A lokalno kompaktna.

Opomba: Če je X lokalno kompakten, $X \in T_2$ in $A = U \cap Z$, kjer je U odprta in Z zaprta, potem je A lokalno kompaktna.

Opomba: Množico oblike $U \cap Z$ imenujemo lokalno zaprta.

Trditev: Če je X lokalno kompakten in $f : X \to Y$ zvezna in odprta, potem je $f(X)$ lokalno kompaktna množica.

Izrek: Kompaktnost je multiplikativna topološka lastnost, lokalna kompaktnost je samo končnomultiplikativna topološka lastnost.