Topologija

zapiski s predavanj

šolsko leto 2008/09

Kazalo

1 Kvocientni prostori

1.1 Kvocientna topologija

V topološkem prostoru X lahko identificiramo nekatere točke in dobimo nov prostor.

∘ Naj bo $X = [0,1]$ Če zlepimo točki 0 in 1, dobimo krožnico kot kvocientni prostor. Če zlepimo točke 0, $\frac{1}{2}$ in 1, dobimo lemniskato. Če zlepimo vse točke na intervalu $[\frac{1}{2},1]$, dobimo interval $[0,\frac{1}{2}]$

∘ Kakšna je topologija na množici, ko zlepimo točke $[0,\frac{1}{2})$ in posebaj še $(\frac{1}{2},1]$? Pričakujemo, če so bile točke pred lepljenjem blizu, da bodo po lepljenju blizu. $[0,\frac{1}{2})$ vsebuje točke, ki so poljubno blizu $\frac{1}{2}$, torej mora biti točka v kvocientnem prostoru poljubno blizu $\frac{1}{2}$. Sledi, da vsaka okolica za $\frac{1}{2}$ vsebuje ves prostor.

Identifikacije točk opišemo z ekvivalenčno relacijo $\sim$, ki inducira dekompozicijo množice na ekvivalenčne rezrede, ki so disjunktni, neprazni in pokrivajo cel X. Ekvivalenčni razred nekega $x \in X$ je $[x] = \{y \in X\ ;\ y \sim x\}$. Tako dobimo dekompozicijo. Vsaka dekompozicija $\mathcal{D}$ množice X določa ekvivalenčno relacijo: $x \sim y \Leftrightarrow x$ in y ležita v isti članici $\mathcal{D}$.

Kvocientna množica množice X z ekvivalenčno relacijo $\sim$ oziroma z dekompozicijo $\mathcal{D}$ je $X/_\sim$ oziroma $X/_\mathcal{D}$, kar je množica vseh ekvivalenčnih razredov oziroma vseh elementov dekompozicije $\mathcal{D}$. (Element dekompozicije predstavlja eno točko v $X/_\mathcal{D}$.)

OPOMBA: Pri opisu ekvivalenčnih relacij zadošča navesti le netrivialne relacije. Analogno velja za dekompozicijo, torej enoelementnih množic ne pišemo.

Kvocientna projekcija je preslikava $q : X \to X/_\sim$, $q : x \mapsto [x]$. Če je X topološki prostor, potem želimo $X/_\sim$ opremiti s topologijo, pri kateri se bližnje točke s q preslikajo v bližnje točke, kar pomeni, da mora biti preslikava q zvezna. Takšnih topologij, pri kateri je q zvezna, je v splošnem veliko. (Vsaka preslikava v trivialno topologijo je zvezna.) Zato želimo takšno topologijo na $X/_\sim$, ki čimbolj odraža topologijo na prostoru X. V ta namen vzamemo takšno topologijo na $X/_\sim$, ki ima čimveč odprtih množic pod pogojem, da q še ostane zvezna. Torej če bo $V^{odp} \subseteq X/_\sim$, mora biti zaradi pogoja za zveznost $q^{-1}(V)^{odp} \subseteq X$. Tako lahko V proglasimo za odprto množico v $X/_\sim$, če je $q^{-1}(V)^{odp} \subseteq X$.

Definicija 1.1. *Naj bo $(X,\mathcal{O})$ topološki prostor, $\sim$ ekvivalenčna relacija na X in $q : X \to X/_\sim$ kvocientna projekcija. Kvocientna topologija na $X/_\sim$ je $\mathcal{O}_\sim = \{V \subseteq X/_\sim\ ;\ q^{-1}(V)^{odp} \subseteq X\}$. Torej:*

$$
\begin{aligned}
V^{odp} \subseteq X/_\sim \quad &\Leftrightarrow q^{-1}(V)^{odp} \subseteq X \\
Z^{zap} \subseteq X/_\sim \quad &\Leftrightarrow q^{-1}(Z)^{zap} \subseteq X
\end{aligned}
$$

OPOMBA: Kvocientna projekcija ni nujno niti odprta niti zaprta.

∘ Naj bo $X = [0,2]$ in $A = [1,2]$ edini netrivialni član dekompozicije $\mathcal{D}$. To pomeni: $x \sim x\ \forall x \in X \quad x \sim y\ \forall x,y \in A \Rightarrow \mathcal{D} = \{\{x\};\ x \in X \setminus A\} \cup A$. V takšnem primeru za $X/_\sim$ oziroma $X/_\mathcal{D}$ pišemo kar $X/_A$, kar pomeni, da identificiramo le točke iz A. Ali je $q : X \to X/_A$ odprta? Vzemimo $U = (1,2)^{odp} \subseteq X$ in preverimo, če je $q(U)$ odprta. Po definiciji kvocientne topologije je to tedaj, ko je njena praslika odprta. $q^{-1}(q(U)) = A^{zap} \subseteq X$, saj je $q(U)$ točka v $X/_A$, ki usteza ekvivalenčnemu razredu A. Praslika te točke je pa cela množica A.

∘ Naj bo $X = [0,1]$ in $A = (0,1)$. $X/_A$ vsebuje tri točke $[0], A, [1]$. Ali je $q : X \to X/_A$ zaprta? Vzemimo $U = \{\frac{1}{2}\}^{zap} \subseteq X$ in preverimo, če je $q(U)$ zaprta. Po definiciji kvocientne topologije je to tedaj, ko je njena praslika zaprta. $q^{-1}(q(U)) = A^{odp} \subseteq X$

Naš cilj je najti metodo s katero bomo lahko pokazali, da je naš kandidat za kvocientni prostor res homeomorfen kvocientni množici opremljeni s kvocientno topologijo, torej poiskali homeomorfizem med $(X/_\sim, \mathcal{O}_\sim)$ in kandidatom Y. Vse želimo narediti le z X in Y.

1.2 Kvocientne preslikave

Naj bosta X in Y množici, $\sim$ ekvivalenčna relacija na X in $f : X \to Y$ preslikava. Zanima nas, kdaj f določa dobro definirano preslikavo $\bar{f} : X/_\sim \to Y$. Naravna izbira je $\bar{f}([x]) = f(x)$.

Težava nastopi, če $y \in [x]$ in bi želeli predpisati $f(y) = \bar{f}([y]) = \bar{f}([x]) = f(x)$. $\bar{f}$ torej ni mogoče definirati, če ima f na ekvivalenčnih točkah lahko različne vrednosti. Pogoj za dobro definirano $\bar{f}$ s prejšno formulo je $x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y)$. Če to velja, $\bar{f}$ obstaja in velja $\bar{f}(q(x)) = f(x)$ za vsak $x \in X$, torej $\bar{f}q = f$.

Trditev 1.2. *Naj bosta X in Y topološka prostora, $\sim$ ekvivalenčna relacija na X in $f : X \to Y$ zvezna preslikava.*

1. *Če za poljuben par $x, y \in X$ in za $x \sim y$ velja $f(x) = f(y)$, potem je inducirana preslikava $\bar{f}$ zvezna in dobro definirana.*

2. *Če obstaja $\bar{f}$, potem je:*

   (a) *$\bar{f}$ surjektivna, če je f surjektivna,*

   (b) *$\bar{f}$ injektivna, če velja $f(x) = f(y) \Rightarrow x \sim y$.*

Dokaz. 1. Obstoj $\bar{f}$ smo že pokazali. Dokažimo še zveznost $\bar{f}$. Izberimo poljubno $V^{odp} \subseteq Y$. Zaradi zveznosti f je $f^{-1}(V)^{odp} \subseteq X$. Iz $f^{-1} = (\bar{f}q)^{-1} = q^{-1}\bar{f}^{-1}$ sledi $q^{-1}(\bar{f}^{-1}(V))^{odp} \subseteq X$. Po definiciji kvocientne topologije je $\bar{f}^{-1}(V)^{odp} \subseteq X/_\sim$, kar pomeni zveznost preslikave $\bar{f}$.

2. Vemo $\bar{f}q = f$. Če je f surjektivna, sledi $\bar{f}$ surjektivna iz teorije množic. Če je $\bar{f}$ injektivna, velja $\bar{f}([x]) = \bar{f}([y]) \Rightarrow [x] = [y]$, kar je $f(x) = f(y) \Rightarrow x \sim y$.

□

OPOMBA: Če $\bar{f}$ obstaja in je injektivna ($f(x) = f(y) \Leftrightarrow x \sim y$), potem rečemo, da f naredi iste identifikacije kot $\sim$ s kvocientno projekcijo q.

Kanonični razcep preslikave

Preslikava $f : X \to Y$ določa dekompozicijo X s praslikami točk $\mathcal{D} = \{f^{-1}(y)\ ;\ y \in Y\}$. $\mathcal{D}$ določa ekvivalenčno relacijo, ki zadošča pogoju ($f(x) = f(y) \Leftrightarrow x \sim y$), torej f in $\sim$ naredita iste identifikacije. Potem je $f : X \xrightarrow{q} X/_\mathcal{D} \xrightarrow{\bar{f}} f(X) \xhookrightarrow{i} Y$. Nas zanima, kdaj bo $\bar{f}$ homeomorfizem kot preslikava iz $X/_\mathcal{D}$ v Y. Očitno mora biti $f(X) = Y$, kar pomeni f surjektivno. V našem primeru je $\bar{f}$ tudi injektivna.

$\bar{f}$ bo homeomorfizem, če bo identificiral topologijo na $X/_\mathcal{D}$ s topologijo na $Y = f(X)$. $\bar{f}$ je homeomorfizem natanko tedaj, ko $\bar{f}$ priredi bijekcijo med odprtimi množicami v Y in odprtimi množicami v $X/_\sim$. Torej za poljubno $V^{odp} \subseteq Y$ natanko tedaj $\bar{f}^{-1}(V)^{odp} \subseteq X/_\sim$ natanko tedaj $q^{-1}(\bar{f}^{-1}(V))^{odp} \subseteq X$ natanko tedaj $f^{-1}(V)^{odp} \subseteq X$.

Definicija 1.3. *Preslikava $f : X \to Y$ je kvocientna, če je surjektivna in velja:* $\forall\ V \subseteq Y : V^{odp} \subseteq Y \Leftrightarrow f^{-1}(V)^{odp} \subseteq X$ *ali* $\forall\ Z \subseteq Y : Z^{zap} \subseteq Y \Leftrightarrow f^{-1}(Z)^{zap} \subseteq X$

OPOMBA: $\Rightarrow$ pomeni zveznost, $\Leftarrow$ pa je dodaten pogoj, ki ne pomeni nujno f odprto. Če je f zvezna, odprta ali zaprta preslikava, potem je f kvocientna preslikava.

Izrek 1.4. *Naj bosta X in Y topološka prostora, $\sim$ ekvivalenčna relacija na X in $f : X \to Y$ kvocientna preslikava, ki naredi iste identifikacije kot $\sim$. Potem je inducirana preslikava $\bar{f} : X/_\sim \to Y$ homomorfizem.*

OPOMBA: Kvocientni prostor $X/_\sim$ identificiramo z našim modelom Y tako, da poiščemo preslikavo $f: X \to Y$, ki je kvocientna in naredi iste identifikacije.

∘ Naj bo $X = [0,1]$ in $0 \sim 1$. Ugibamo, da je kandidat za $X/_\sim \approx S^1$. Iščemo $f: X \to S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$ $\quad f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) = e^{2\pi i t}$ f je zvezna, saj je e^x zvezna analitična funkcija. f je surjektivna, saj je $f(X) = S^1$. f je zaprta, ker zvezno slika iz kompaktnega prostora X v prostor S^1, ki je T_2. Torej je f kvocientna. f naredi iste identifikacije, saj $f(s) = f(t) \Rightarrow e^{2\pi i s} = e^{2\pi i t} \Rightarrow 2\pi s = 2\pi t + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}$ $s = t + k \Rightarrow s - t = k \in X \cap \mathbb{Z} = \{0,1\} \Rightarrow s = t \vee s = t + 1 \Rightarrow t = 0 \wedge s = 1 \Rightarrow 0 \sim 1$.

∘ Naj bo $X = [0,1] \times [0,1]$ kvadrat. Identificiramo točke $(0,y) \sim (1,y)$ in $(x,0) \sim (x,1)$, kjer $x, y \in [0,1]$. Dobimo torus ali svitek. Kandidat za $X/_\sim$ je $S^1 \times S^1$. Iščemo kvocientno preslikavo $f: X \to S^1 \times S^1$, ki naredi iste identifikacije. Uganemo $f(x,y) = (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$ f je zvezna, saj je zvezna po komponentah. f je surjektivna, saj je $f(X) = S^1 \times S^1$. f je zaprta, ker zvezno slika iz kompaktnega prostora X v prostor $S^1 \times S^1$, ki je T_2. Torej je f kvocientna. f naredi iste identifikacije.

∘ Naj bo $X = B^2$ in $A = S^1$ edini netrivialni član dekompozicije. A stisnemo v točko, drugje pustimo in dobimo sfero S^2. Za utemeljitev $X/_A \approx S^2$ moramo najti $f: X \to S^2$, ki je kvocientna preslikava in naredi iste identifikacije, torej identificira vse točke iz A v eno točko in $f|_{X \setminus A}$ je injektivna.

∘ Naj bo $X = I_a^2 + I_b^2$, kjer je $I = [0,1]$. Identificiramo točke $(1,y)_a \sim (0, f(y))_b$, kjer je $f: I \to I$ poljuben homeomorfizem. Zdi se, da bo $X/_A \approx [0,2] \times [0,1]$. $\bar{f_a}: (x,y) \mapsto (x, f(y))$ $\quad \bar{f_b}: (x,y) \mapsto (x,y)$ $\quad \bar{g_a}: (x,y) \mapsto (x,y)$ $\quad \bar{g_b}: (x,y) \mapsto (x+1,y)$ $\bar{g} \circ \bar{f}: I_a^2 + I_b^2 \to [0,2] \times [0,1]$ je kvocientna preslikava in naredi iste identifikacije.

Operacije s kvocientnimi preslikavami

Trditev 1.5.

$$f: X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

1. *Če sta f in g kvocientni preslikavi, potem je kompozitum $g \circ f$ kvocientna preslikava.*
2. *Če je kompozitum $g \circ f$ kvocientna preslikava ter sta f in g zvezni, potem je g kvocientna.*

Dokaz:

1. Ker sta f in g surjektivni, je $g \circ f$ surjektivna. Preveriti moramo še $V^{odp} \subseteq Z \Leftrightarrow (g \circ f)^{-1}(V)^{odp} \subseteq X$. Naj bo $V^{odp} \subseteq Z$ poljubna. Ker je g kvocientna, je $g^{-1}(V)^{odp} \subseteq Y$. Ker je f kvocientna, je $f^{-1}(g^{-1}(V))^{odp} \subseteq X = (g \circ f)^{-1}(V)^{odp} \subseteq X$. Enako za drugo smer.

2. Ker je kompozitum kvocientna preslikava, je $g \circ f$ surjektivna, iz česar sledi g surjektivna. Vzemimo $V^{odp} \subseteq Z$. Ker je g zvezna, je $g^{-1}(V)^{odp} \subseteq Y$. Pokazati moramo še, če je $g^{-1}(V)^{odp} \subseteq Y$, potem je $V^{odp} \subseteq Z$. Vzemimo $g^{-1}(V)^{odp} \subseteq Y$. Ker je f zvezna, je $f^{-1}(g^{-1}(V))^{odp} \subseteq X$. Ker je $g \circ f$ kvocientna preslikava, je $V^{odp} \subseteq Z$.

1.3 Deljivost topoloških lastnosti

Definicija 1.6. *Topološka lastnost $\mathcal{L}$ je deljiva, če se z vsakega prostora prenese na vsak njegov kvocientni prostor. Torej topološka lastnost $\mathcal{L}$ je deljiva, če se ohranja pri kvocientnih preslikavah.*

Trditev 1.7. *Deljive topološke lastnosti so: kompaktnost, povezanost, povezanost s potmi (saj se ohranjajo pri zveznih preslikavah), lokalna povezanost, lokalna povezanost s potmi in separabilnost. Nedeljive topološke lastnosti so: $T_0 - T_4$, lokalna kompaktnost, 1-števnost in 2-števnost.*

∘ Naj bo $X = \mathbb{R} \times \{0\} \cup \mathbb{R} \times \{1\}$. Identificiramo točke $(x,0) \sim (x,1)$ $\forall x < 0$. Točki $(0,1)$ in $(0,0)$ nimata več disjunktnih odprtih okolic v kvocientnem prostoru, torej prostor ni T_2.

Trditev 1.8. *Naj bo $\mathcal{D}$ dekompozicija za X. $X/_{\mathcal{D}} \in T_1$ natanko tedaj, ko so članice $\mathcal{D}$ zaprte podmnožice v X.*

Dokaz: $X/_{\mathcal{D}} \in T_1$ natanko tedaj, ko so vsi singletoni v $X/_{\mathcal{D}}$ zaprti. Po definciji kvocientne projekcije q so praslike točk iz $X/_{\mathcal{D}}$ v X zaprte.

1.4 Topološke grupe in delovanja

Ideja je opremiti nek algebraični objekt s topologijo in povezati strukturi tako, da zahtevamo zveznost algebraičnih operacij.

Definicija 1.9. *Naj bo G množica opremljena s strukturo grupe in topološkega prostora. Rečemo, da je G topološka grupa, če sta množenje $G \times G \to G$ in invertiranje $G \to G \quad g \mapsto g^{-1}$ zvezni preslikavi.*

∘ Poljubna grupa G opremljena z diskretno topologijo je topološka grupa.

∘ Naj bo G topološka grupa in $H \leq G$ poljubna podgrupa. Potem je H z inducirano topologijo tudi topološka grupa.

∘ $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\},\cdot)$ in $(\mathbb{C} \setminus \{0\},\cdot)$ z evklidsko topologijo so topološke grupe.

∘ $S^0 = \{-1,1\}$, $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \; ; \; |z| = 1\}$, $S^3 \subseteq \mathbb{H}$ enotski kvaternioni.

∘ Če je $\{G_\lambda \; ; \; \lambda \in \Lambda\}$ družina topoloških grup, je $\prod G_\lambda$ s produktno topologijo tudi topološka grupa z operacijo po komponentah.

∘ Naj bo $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}) \subseteq \mathbb{F}^{n\times n}$ je splošna linearna grupa (obrnljivih matrik) nad $\mathbb{F}$. Množenje in invertiranje matrik sta zvezni preslikavi. Pomembne podgrupe so:

- $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}) \; ; \; \det A = 1\}$
- $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \; ; \; A^\top A = I\}$ ortogonalna grupa
- $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$
- $\mathrm{U}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \; ; \; A^* A = I\}$ unitarna grupa
- $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{U}_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$

Trditev 1.10. *Naj bo G topološka grupa in $a \in G$. Leva in desna translacija za a sta homeomorfizma.*

Dokaz: Očitno je bijekcija. Zveznost: $L_a(g) = ag \quad$ Množenje v topološki grupi je zvezno. Zveznost inverza: $(L_a)^{-1} = L_{a^{-1}} \quad L_{a^{-1}}(L_a(g)) = L_{a^{-1}}(ag) = a^{-1}(ag) = (a^{-1}a)g = g$

Trditev 1.11. *Topološka grupa G je homogen prostor. Za poljubna $a,b \in G$ obstaja tak homeomorfizem $h : G \to G$, da velja $h(a) = b$.*

Dokaz: $h = L_{ba^{-1}} \quad h(a) = L_{ba^{-1}}(a) = (ba^{-1})a = b(a^{-1}a) = b$

Definicija 1.12. *Naj bo X topološki prostor in G topološka grupa. Delovanje grupe G na X je zvezna preslikava $\varphi : G \times X \to X \; (a,x) \mapsto ax$ za katero velja: $ex = x \; \forall \; x \in X \; e \in G$ enota in $a(bx) = (ab)x \; ab \in G$.*

OPOMBA: Za poljuben $a \in G$ je preslikava $a : X \to X \; x \mapsto ax$ homeomorfizem. Njen inverz je a^{-1}.

∘ Če je G topološka grupa in $H \leq G$, potem H deluje na G z množenjem (delovanjem) $H \times G \to G$, kar je zožitev produkta na G.

∘ $S^1 \subset \mathbb{C}$ deluje na $\mathbb{C}$ z množenjem kompleksnih števil. $S^1 \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \; (\alpha, z) \mapsto \alpha z$

∘ Naj bo $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}\}$. Naj bo $G = (\mathbb{F} \setminus \{0\},\cdot)$ topološka grupa za množenje z evklidsko topologijo. Potem G deluje na $\mathbb{F}^n$ z množenjem s skalarjem. $G \times \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n \quad (\lambda,(x_1,x_2,\ldots,x_n)) \mapsto (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$

Delovanje grupe G na X določa ekvivalenčno relacijo: $x \sim y$ natanko tedaj, ko obstaja $g \in G$, da je $y = gx$.

Definicija 1.13. *Ekvivalenčne razrede pri tej relaciji imenujemo orbite.* $[x] = Gx = \{gx \ ; \ g \in G\}$. *Kvocientno množico* $X/_{\sim}$ *imenujemo prostor orbit in označimo* $X/_G$.

∘ Naj bo $(\mathbb{R},+)$ topološka grupa z evklidsko topologijo. $(\mathbb{Z},+) \leq (\mathbb{R},+)$ je podgrupa in deluje na $\mathbb{R}$ s seštevanjem. $\mathbb{Z}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n,x) \mapsto n+x$ $(0,x) = 0+x = x$ $\quad (n+m,x) = (n+m)+x = n+(m+x) = (n,m+x) = (n,(m,x))$ To delovanje $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{R}$ porodi ekvivalenčno relacijo: $x \sim y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} : y = n+x \Leftrightarrow y-x \in \mathbb{Z}$ Na intervalu $[0,1]$ najdemo predstavnike vseh ekvivalenčnih razredov. Na tem intervalu sta ekvivalentni le 0 in 1. Ugibamo: $\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}} \approx S^1$ in iščemo kvocientno preslikavo $f : \mathbb{R} \to S^1$, ki naredi iste identifikacije kot $\sim$: $f(x) = f(y) \Leftrightarrow y-x \in \mathbb{Z}$. $f(x) = e^{2\pi i x}$ je surjektivna in zvezna, a ni zaprta, saj ne slika iz kompaktnega prostora. Preverimo odprtost preslikave f na bazi. Če za bazo topološkega prostora $\mathbb{R}$ vzamemo odprte intervale dolžine manj kot 1, f vsak tak interval homeomorfno preslika na odprt krožni lok.

OPOMBA: Kvocientne projekcije so pri delovanju grup odprte.

Trditev 1.14. *Naj bo* G *topološka grupa, ki deluje na topološkemu prostoru* X*. Potem je kvocientna projekcija* $q : X \to X/_G$ *odprta preslikava.*

Dokaz: Naj bo $V^{odp} \subseteq X$ poljubna odprta množica. Dokazujemo $q(V)^{odp} \subseteq X/_G$. Po definiciji kvocientne topologije bo to, ko bo $q^{-1}(q(V))^{odp} \subseteq X$. $q^{-1}(q(V)) = \{x \in X \ ; \ q(x) \in q(V)\} = \{x \in X \ ; \ \exists y \in V : q(x) = q(y)\} = \{x \in X \ ; \ \exists y \in V, \exists g \in G : x = gy\} = \{gy \ ; \ y \in V, g \in G\} = \bigcup_{g\in G} L_g(V)$ Ker je L_g homeomorfizem, slika odprte množice v odprte množice, torej je $L_g(V)^{odp} \subseteq X$. Poljubna unija odprtih množic je odprta množica. $\bigcup_{g\in G} L_g(V)^{odp} = q^{-1}(q(V))^{odp} \subseteq X$ torej je $q(V)^{odp} \subseteq X/_G$.

1.5 Projektivni prostori

Slabost evklidske ravninske geometrije je, da se dve različni premici bodisi sekata bodisi sta vzporedni. V dokazih je včasih potrebno ločiti dva primera, zato želimo geometrijo, v kateri se vsi pari premic obnašajo enako. Vsaki poljubni dve premici se sekata v natanko eni točki. Dodamo točke v ∞ tako, da za vsak snop vzporednih premic dodamo eno idealno točko, v kateri se vse te premice sekajo. Različnim snopom vzporednih premic pripadajo različne točke. Tako dobimo projektivno ravnino $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$. $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\text{premice v } \mathbb{R}^2 \text{ modulo vzporednost}\}$ Zanima nas, ali so točke v ∞ drugačne od točk v $\mathbb{R}^2$, koliko je teh točk, ali sestavljajo kakšen geometrični objekt, kako je z razdaljo v $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ ali vsaj s topologijo. Iz našega opisa $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ to ni jasno.

Rešitev: Vse točke naredimo enakovredne. To naredimo tako, da $\mathbb{R}^2$ vložimo kot $\mathbb{R}^2\times\{1\}$ v $\mathbb{R}^3$ in točke v $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ enačimo s premicami skozi izhodišče v $\mathbb{R}^3$. Vsaka točka $A \in \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R}^2 \times \{1\}$ določa natanko eno premico L skozi $0 \in \mathbb{R}^3$. $L = \{t\cdot A \ ; \ t \in \mathbb{R}\}$ Očitno L ne leži v x,y ravnini. Obratno, poljubna premica $L \subset \mathbb{R}^3$ skozi 0 določna natanko eno točko na $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$, to je $L \cap \mathbb{R}^2 \times \{1\}$. Na ta način smo dobili bijekcijo med točkami v $\mathbb{R}^2$ in premicami v $\mathbb{R}^3$ skozi 0. Neskončna točka v $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ je snop vzporednih premic v $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$ in ta ustreza premici v $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ skozi 0, ki je vzporedna premicam v snopu. Torej $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 = \{\text{premice v } \mathbb{R}^3 \text{ skozi } 0\} = \{L \ ; \ L \subset \mathbb{R}^3 \text{ enodimenzionalen podprostor}\}$

Ali je to dekompozicija $\mathbb{R}^3$? Ne, saj se vsi linearni podprostori sekajo v 0. Boljša izbira $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 = \{L \setminus \{0\} \ ; \ L \subset \mathbb{R}^3 \text{ enodimenzionalen podprostor}\}$. To je dekompozicija za $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Pripadajoča ekvivalenčna relacija je: $x,y \in \mathbb{R}^3 \quad x \sim y \Leftrightarrow x = ty \ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (ležita v istem enodimenzionalnem podprostoru) Ta ekvivalenčna relacija je porojena z delovanjem grupe $(\mathbb{R} \setminus \{0\},\cdot)$ na $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Torej $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \approx (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})/_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} = (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})/_{x\sim tx \ t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, \ x\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}}$.

Na osnovi tega definiramo splošno.

Definicija 1.15. *Naj bo $n \in \mathbb{N}$. n-dimenzionalen projektivni prostor, opremljen s kvocientno topologijo, nad $\mathbb{R}$ je kvocientni prostor:*

$$\mathbb{RP}^n \approx \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$$

OPOMBA: Enako konstrukcijo lahko naredimo za poljuben topološki obseg $\mathbb{F}$. Na primer ($\mathbb{C}$, evklidska topologi ali p-adični obsegi.

$$\mathbb{CP}^n \approx \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}/_{\mathbb{C}\setminus\{0\}}$$

Trditev 1.16. *Naj bo $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. $\mathbb{FP}^n$ je homogen prostor. $\forall\ [x],[y] \in \mathbb{FP}^n$ obstaja homeomorfizem $h : \mathbb{FP}^n \to \mathbb{FP}^n \quad h([x]) = [y]$ Torej $\mathbb{FP}^n$ izgleda enako v vseh točkah.*

Dokaz: Izberimo poljubni točki $[x],[y] \in \mathbb{FP}^n$ in njuna predstavnika $x, y \in \mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\}$. Iščemo preslikavo iz $\mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\}$ vase, ki x preslika v y in inducira homeomorfizem na $\mathbb{FP}^n$. Za dana x, y obstaja $A \in GL_{n+1}(\mathbb{F})$, da je $Ax = y$ (sprememba baze). Pomembno je, da A slika premice v premice, torej ekvivalenčne razrede v ekvivalenčne razrede in ne naredi identifikacij, ker je obrnljiva in bijektivna.

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\} & \stackrel{A}{\to} & \mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\} \\
 & h & \\
q_1 \downarrow & \searrow & \downarrow q_2 \\
\mathbb{FP}^n & \stackrel{\bar{h}}{\to} & \mathbb{FP}^n
\end{array}$$

Naj bo $h = q_2 \circ A$. h je kvocientna preslikava, ker je q_2 kvocientna po definiciji in A kvocientna, saj je homeomorfizem. q_2 in $h = q_2 \circ A$ naredita iste identifikacije, saj oba identificirata le kolinearne točke. Sledi, da je $\bar{h}$ homeomorfizem.

$\circ\ \mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$
$n = 0$: $\mathbb{FP}^0 \approx \mathbb{F}^1 \setminus \{0\}/_{\mathbb{F}\setminus\{0\}} = \{a\}$ točka
$n = 1$: $\mathbb{FP}^1 \approx \mathbb{F}^2 \setminus \{0\}/_{\mathbb{F}\setminus\{0\}}$
Če $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ vsak ekvivalenčni razred seka S^1 v dveh točkah. Vsi ekvivalenčni razredi so predstavljeni s točkami na S^1. Vsak razred ima dva predstavnika $\{x, -x\}$. Ugibamo, da je $\mathbb{FP}^1 \approx S^1$. Če $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ dobimo ploskev.

Vsi ekvivalenčni razredi v $\mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\}$ imajo predstavnike na enotski sferi v tem prostoru, saj vsaka premica seka sfero.

Definicija 1.17.

- $S(\mathbb{F}^k) = \{x \in \mathbb{F}^k\ ;\ ||x|| = 1\}$ - *enotska sfera*
- $S(\mathbb{R}^k) = S^{k-1} \subset \mathbb{R}^k$
- $S(\mathbb{C}^k) = S^{2k-1} \subset \mathbb{C}^k \equiv \mathbb{R}^{2k}$

$S(\mathbb{F})$ je podgrupa v $\mathbb{F} \setminus \{0\}$. $S(\mathbb{R}) = S^0 = \{\pm 1\}$ $S(\mathbb{C}) = S^1$

Trditev 1.18. *$S(\mathbb{F}) \subset \mathbb{F} \setminus \{0\}$ je topološka podgrupa. Zožitev delovanja grupe $\mathbb{F} \setminus \{0\}$ na $\mathbb{F}^k \setminus \{0\}$ porodi delovanje grupe $S(\mathbb{F})$ na $S(\mathbb{F}^k)$.*

Dokaz: $\mathbb{F} = \mathbb{R}$: $S(\mathbb{R}) = \{\pm 1\}$. Množenje s števili iz $\{\pm 1\}$ slika sfero S^{k-1} vase. $\mathbb{F} = \mathbb{C}$: $S(\mathbb{C}) = S^1$. Množenje s števili iz S^1 slika sfero S^{2k-1} vase. Če je $x \in \mathbb{C}$ poljuben in $t \in S^1 \Rightarrow |t| = 1$, kar predstavlja rotacijo. $|tx| = |t||x| = 1|x| = |x|$ Če je $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in S^{2k-1} \subset \mathbb{C}^k \Rightarrow |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_k|^2 = 1$. Potem je $(tx_1, tx_2, \ldots, tx_k) \in S^{2k-1}$, saj je $|tx_1|^2 + |tx_2|^2 + \cdots + |tx_k|^2 = |t|^2|x_1|^2 + |t|^2|x_2|^2 + \cdots + |t|^2|x_k|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_k|^2 = 1$

Trditev 1.19. *Kvocientna projekcija $q : \mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{FP}^n$ je odprta.*

Dokaz: q je odprta, saj je kvocientna preslikava pri delovanju grupe.

Trditev 1.20. *$\mathbb{FP}^n$ je homeomorfen $S(\mathbb{F}^{n+1})/_{S(\mathbb{F})} = S(\mathbb{F}^{n+1})/_{x \sim tx\ t \in S(\mathbb{F}),\ x \in S(\mathbb{F}^{n+1})}$.*

Dokaz: Sfera $S(\mathbb{F}^{n+1}) \subset \mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\}$ seka vsak ekvivalenčni razred v $\mathbb{F}\mathrm{P}^n$, saj so ekvivalenčni razredi premice skozi $0 \in \mathbb{F}^{n+1}$, zato je dovolj gledati kvocient $S(\mathbb{F}^{n+1})$ po inducirani ekvivalenčni relaciji. Z namenom, da bi ta ideja delovala, bi morali vedeti še kaj o $\mathbb{F}\mathrm{P}^n$.

Lahko se dokaza lotimo z druge strani. Imejmo preslikavo $r : \mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\} \to S(\mathbb{F}^{n+1}) \quad x \mapsto \frac{x}{||x||}$. Ker ta preslikava identificira le kolinearne točke, ne naredi več identifikacij kot $q : \mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{F}\mathrm{P}^n$. Pokazati želimo, da je r kvocientna preslikava.

Očitno je r zvezna in surjektivna, saj točke na $S(\mathbb{F}^{n+1})$ slika nazaj vase. Za dokaz odprtosti in zveznosti opazimo, da je vseeno, če je $\mathbb{F}$ bodisi $\mathbb{R}$ bodisi $\mathbb{C}$. $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^{2n+2} \setminus \{0\} \to S(\mathbb{C}^{n+1}) = S(\mathbb{R}^{2n+2})$. Dovolj je premisliti za splošno preslikavo $r : \mathbb{R}^k \setminus \{0\} \to S^{k-1}$, ki je projekcija na sfero. Naprej opazimo, da je $\mathbb{R}^k \setminus \{0\} \approx S^{k-1} \times (0,\infty)$ in $h : \mathbb{R}^k \setminus \{0\} \to S^{k-1} \times (0,\infty) \quad x \mapsto (\frac{x}{||x||}, ||x||)$

Preslikava r je kompozitum $r : \mathbb{R}^k \setminus \{0\} \to S^{k-1} \times (0,\infty) \to S^{k-1} \quad x \mapsto (\frac{x}{||x||}, ||x||) \mapsto \frac{x}{||x||}$. Preslikava $r = pr_1 \circ h$ je odprta, saj je kompozitum dveh odprtih preslikav (homeomorfizma h in projekcije na prvi faktor pr_1), torej je kvocientna preslikava.

Definirajmo preslikavo $f = p \circ r : \mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\} \to S(\mathbb{F}^{n+1}) \to S(\mathbb{F}^{n+1})/_{S(\mathbb{F})}$, ki je kvocientna preslikava, saj sta p in r kvocientni preslikavi. Od prej imamo še kvocientno projekcijo $q : \mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{F}\mathrm{P}^n$. Če pokažemo, da f naredi iste identifikacije kot q, bo sledilo, da je inducirana preslikava $\bar{f} : \mathbb{F}\mathrm{P}^n \to S(\mathbb{F}^{n+1})/_{S(\mathbb{F})}$ homeomorfizem.

$f(x) = f(y) \Leftrightarrow p(r(x)) = p(r(y)) \Leftrightarrow \exists \lambda \in S(\mathbb{F}) : r(x) = \lambda r(y) \Leftrightarrow \exists \lambda \in S(\mathbb{F}) : \frac{x}{||x||} = \lambda \frac{y}{||y||} \Leftrightarrow x = \lambda \frac{||x||}{||y||} y \Leftrightarrow$
$\exists \mu \in \mathbb{F} \setminus \{0\} : x = \mu y \Leftrightarrow q(x) = q(y)$

$$\Rightarrow \mathbb{F}\mathrm{P}^n \approx S(\mathbb{F}^{n+1})/_{S(\mathbb{F})}$$

Torej je v posebnem primeru: $\mathbb{R}\mathrm{P}^n \approx S(\mathbb{R}^{n+1})/_{S(\mathbb{R})} \approx S^n/_{S^0} = S^n/_{x\sim -x}$ - identificira antipodne točke in $\mathbb{C}\mathrm{P}^n \approx S(\mathbb{C}^{n+1})/_{S(\mathbb{C})} \approx S^{2n+1}/_{S^1}$.

OPOMBA: $\mathbb{R}\mathrm{P}^n \approx S^n/_{S^0} \quad \mathbb{C}\mathrm{P}^n \approx S^{2n+1}/_{S^1}$

Trditev 1.21. *$\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ je homeomorfen $B^n/_{x\sim -x \ x\in S^{n-1}}$*

Dokaz: Naj bo $f : B^n \xrightarrow{\approx} S^n_+ \xhookrightarrow{i} S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n \quad x \mapsto (x, \sqrt{1-||x||^2})$ in $q_B : B^n \to B^n/_{x\sim -x \ x\in S^{n-1}}$. f je surjektivna, saj so na S^n ekvivalenčni razredi oblike $\{x,-x\}$ in vsaj eden od teh dveh elementov pripada $S^n_+ = \{(x_1,x_2,\dots,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \ ; \ |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_{n+1}|^2 = 1, x_{n+1} \geq 0\}$.

f je kvocientna, saj je zvezna in zaprta in naredi iste identifikacije kot q_B. $f(x) = f(y) \Leftrightarrow h(x) = \pm h(y)$ Če je $h(x) = h(y)$, je $x = y$, saj je $\approx$ homeomorfizem. Če je $h(x) = -h(y)$, mora biti (n+1)-koordinata v $|h(x)|$ in $h(y)$ enaka 0, torej je $||x|| = ||y||$, zato sta $x, y \in S^{n-1}$. Za take x, y je $h(x) = (x, 0)$ in $h(y) = (y, 0)$ in dobimo $x = y$. Zato obstaja inducirana preslikava $\bar{f} : B^n/_{x\sim -x \ x\in S^{n-1}} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$, ki je homeomorfizem.

∘ $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \approx B^2/_{x\sim -x \ x\in S^1}$, ampak $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \not\approx S^2$

Trditev 1.22. $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \approx S^2$ *- Riemannova sfera*

Dokaz: $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ znamo predstaviti kot kvocient sfere S^3. $p : S^3 \to S^3/_{S^1} \approx \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ je kvocientna projekcija. Iščemo kvocientno preslikavo $f : S^3 \to S^2$, ki inducira homeomorfizem med S^2 in $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$. Naj bo $f : S^3 = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \ ; \ |x|^2 + |y|^2 = 1\} \to S^2 = \{(z,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \ ; \ |z|^2 + t^2 = 1\} \quad (x,y) \mapsto (2\bar{x}y, |x|^2 - |y|^2)$, ki slika v S^2, in je zvezna po komponentah, surjektivna, zaprta, saj slika iz kompaktnega prostora v podprostor prostora T_2. Prverimo še, da preslikava f naredi iste identifikacije kot p.

1.6 Pomembnejši primeri kvocientov

Definicija 1.23. *Naj bo $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Stožec nad X je $CX = X \times [0,1]/_{X\times\{1\}}$. Suspenzija nad X je $\Sigma X = X \times [-1,1]/_{X\times\{-1\}, X\times\{1\}}$.*

Suspenzija ΣX je unija dveh stožcev nad X vzdolž baze $X \equiv X \times \{0\}$.

Trditev 1.24. *1.* $\mathcal{C}S^{n-1} \approx B^n$

2. $\Sigma S^{n-1} \approx S^n$

Definicija 1.25. *Naj bosta* $(X, \mathcal{O}_X)$ *in* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *topološka prostora. Naj bo* $A \subseteq X$ *in* $f : A \to Y$ *zvezna preslikava. Zlepek* X *in* Y *vzdolž* f *je* $X \cup_f Y = X + Y/_{a \sim f(a); a \in A}$

Torej X prilepimo na Y vzdolž preslikave f z domeno $D_f = A$. Pri tej kvocientni projekciji so ekvivalenčni razredi oblike $\{x\}, x \in X \setminus A; \{y\}, y \in Y \setminus f(A); \{y\} \cup f^{-1}(y), y \in f(A)$.

∘ Naj bo $f : S^{n-1} \to S^{n-1}$ homeomorfizem. $S^{n-1} \subset B^n$. Konstruiramo lahko zlepek $B^n \cup_f B^n$. Če $f = id$, je $B^n \cup_f B^n \approx S^n$.

Definicija 1.26. *Naj bo* $(X, \mathcal{O})$ *topološki prostor in* $n \in \mathbb{N}$. *Naj simetrična grupa* S_n *deluje na n-kratni produkt* $X^n = X \times X \times \cdots \times X$ *s permutacijami faktorjev. Če je* $\sigma \in S_n$ *in* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^n$*, potem je* $\sigma \cdot x = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$. *Kvocient* $X^n/_{S_n}$ *imenujemo simetrični produkt prostora X.*

Ti se pojavijo pri študiju konfiguracijskih prostorov. To so prostori n (neoznačenih) točk, ki se gibljejo v X.

2 Normalni prostori

2.1 Normalnost in zvezne funkcije

Za topološki prostor je pomembno vedeti, koliko je zveznih funkcij na prostoru. Konstante so vedno zvezne funkcije in lahko se pripeti, da so edine zvezne funkcije na prostoru.

Ker je $\mathbb{R}$ metrizabilen in normalen prostor ter ustreza vsem separacijskim lastnostim, je veliko zveznih funkcij na $\mathbb{R}$. Če X ni normalen, je lahko zelo malo funkcij na X, saj obstajajo regularni prostori, na katerih so zvezne le konstantne funkcije. Če je X normalen, je funkcij veliko in ločijo točke.

Trditev 2.1. *Naj bo $X \in T_4$ in $A, B^{zap} \subseteq X$ neprazni, disjunktni podmnožici. Potem obstaja zvezna funkcija $\varphi : X \to [0,1]$ $\quad \varphi(A) = 0 \quad \varphi(B) = 1$. (Urisonova lema)*

Dokaz: Če je X metrizabilen in d njegova metrika, za φ lahko vzamemo $\varphi(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$. Če X ni metrizabilen, si pomagamo s karakterizacijo T_4 z okolicami: $A^{zap} \subseteq X$ in $A \subseteq V^{odp} \subseteq X$, potem obstaja $W^{odp} \subseteq X$, da je $A \subseteq W \subseteq \bar{W} \subseteq V$. Induktivno skonstruiramo zaporedje odprtih množic $V_{\frac{a}{2^n}}$, kjer je $n \in \mathbb{N}$ in $a \in \{1,3,5,7,\ldots\}$. $V_1 = X \setminus B$ odprta okolica za A. Tedaj obstaja $V_0^{odp} \subseteq X$, da je $A \subseteq V_0 \subseteq \bar{V}_0 \subseteq V_1$. Med $\bar{V}_0$ in V_1 vrinemo $V_{\frac{1}{2}}$, saj obstaja $V_{\frac{1}{2}}^{odp} \subseteq X$, da je $\bar{V}_0 \subseteq V_{\frac{1}{2}} \subseteq \bar{V}_{\frac{1}{2}} \subseteq V_1$. Nato vrinemo $V_{\frac{1}{4}}$ med $\bar{V}_0$ in $V_{\frac{1}{2}}$ in $V_{\frac{3}{4}}$ med $\bar{V}_{\frac{1}{2}}$ in V_1. In tako naprej. Definiramo

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in A \\ 1 & ; x \in B \\ \inf\{\frac{a}{2^n}\} & ; x \in V_{\frac{a}{2^n}} \end{cases}$$

Trditev 2.2. *$X \in T_4$ natanko tedaj, ko obstaja zvezna funkcija φ.*

Dokaz: Dokazujemo, da je $X \in T_4$. Izberimo poljubni neprazni disjunktni množici $A, B^{zap} \subseteq X$ in iščemo disjunktni okolici za A, B. Po predpostavki obstaja zvezna funkcija $\varphi : X \to [0,1]$, da je $\varphi(A) = 0 \quad \varphi(B) = 1$. Naj bo $V = \varphi^{-1}([0,\frac{1}{2}))^{odp} \subseteq X$ in $W = \varphi^{-1}((\frac{1}{2},1])^{odp} \subseteq X$. Očitno sta množici disjunktni in velja $A \subseteq V$ ter $B \subseteq W$.

2.2 Razširjenje funkcij

Naj bo $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Zanima nas, pri kakšnih pogojih lahko poljubno zvezno funkcijo definirano na podmnožici A topološkega prostora X razširimo do zvezne funkcije na X. Imamo torej $f : A \to \mathbb{R}$ in nas zanima, če obstaja $F : X \to \mathbb{R}$, da je $F|_A = f$ oziroma $F(a) = f(a)\ \forall a \in A$.

OPOMBA: To ni vedno mogoče.

∘ $X = \mathbb{R}$, $A = (0,\infty)$, $f(x) = x^{-1}$.

Če je funkcija f definirana na množici A, so s tem določene tudi njene vrednosti na $\bar{A}$. Če je X 1-števen, potem je $x \in \bar{A}$ limita točk $a_n \in A$. Torej mora veljati $F(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$, zato se je smiselno omejiti na $A^{zap} \subseteq X$.

Izrek 2.3. *Naj bo $J \subseteq \mathbb{R}$ interval, X normalen prostor, $A^{zap} \subseteq X$ in $f : A \to J$ zvezna funkcija. Potem obstaja zvezna razširitev $F : X \to J$ za f. (Tietzejev izrek)*

Dokaz: Če je J kompakten, smemo privzeti $J = [-1,1]$, saj je J homeomorfen intervalu $[-1,1]$. Iskano razširitev F bomo definirali kot vsoto vrste zveznih funkcij, ki bo na A enakomerno konvergirala proti f. Za vsak $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ bomo definirali $F_n : X \to J$ z lastnostma: $|F_n(x)| \leq \frac{1}{2}(\frac{2}{3})^n\ \forall x \in X$ in $|f(a) - \sum_{k=0}^{n} F_k(a)| \leq (\frac{2}{3})^n\ \forall a \in A$.

Zaporedje $(F_n)_{n=0}^{\infty}$ konstruiramo tako, da vzamemo za $n = 0 : F_0(x) \equiv 0$. $|F_0(x)| \le \frac{1}{2}$ in $|f(a)| \le 1$, saj $f(a) \in [-1,1]$. Naprej delamo z indukcijo na $n \to n+1$. Po predpostavki že imamo $F_0, F_1, \ldots, F_n$. Naj bo $g : A \to \mathbb{R} \quad g(a) = f(a) - \sum_{k=0}^{n} F_k(a)$. Vemo, da je $|g(a)| \le (\frac{2}{3})^n = \frac{3}{2}(\frac{2}{3})^(n+1) = 3\delta$, kjer je $\delta = \frac{1}{2}(\frac{2}{3})^{n+1}$. Cilj je poiskati $F_{n+1} : X \to J$, da bo $|F_{n+1}(x)| \le \frac{1}{2}(\frac{2}{3})^{n+1} = \delta \; \forall x \in X$ in $|f(a) - \sum_{k=0}^{n+1} F_k(a)| = |f(a) - \sum_{k=0}^{n} F_k(a) - F_{n+1}(a)| = |g(a) - F_{n+1}(a)| \le (\frac{2}{3})^{n+1} = 2\delta \; \forall a \in A$. Očitno moramo $g(a)$ popraviti vsaj tam, kjer je $|g(a)| \ge 2\delta$.

Naj bo $B^+ = g^{-1}([\delta, 3\delta])$ in $B^- = g^{-1}([-3\delta, -\delta])$. B^+ in B^- sta zaprti podmnožici v A, saj sta prasliki zaprtih intervalov pri zvezni funkciji g. Ker je $A^{zap} \subseteq X$, sta $B^+, B^{-zap} \subseteq X$. Naj bo $\varphi : X \to [0,1]$ takšna zvezna funkcija, da $\varphi|_{B^+} = 1$ in $\varphi|_{B^-} = 0$. Naj bo $F_{n+1}(x) = \delta(2\varphi(x) - 1)$. $F_{n+1}(x)$ je zvezna. Preveriti moramo še dve lastnosti. Ker $\varphi(x)$ slika v $[0,1]$, $2\varphi(x) - 1$ slika v $[-1,1]$ in $F_{n+1}(x)$ slika v $[-\delta, \delta]$. Drugo lastnost preverimo na B^+, B^- in $A \setminus (B^+ \cup B^-)$. Izberimo poljuben $a \in B^+$. Sledi $g(a) \in [\delta, 3\delta]$ in $F_{n+1}(a) = \delta$. Torej $g(a) - F_{n+1}(a) \in [0, 2\delta]$. Izberimo poljuben $a \in B^-$. Sledi $g(a) \in [-3\delta, -\delta]$ in $F_{n+1}(a) = -\delta$. Torej $g(a) - F_{n+1}(a) \in [-2\delta, 0]$. Izberimo še poljuben $a \in A \setminus (B^+ \cup B^-)$. Sledi $g(a) \in [-\delta, \delta]$ in $F_{n+1}(a) \in [-\delta, \delta]$. Torej $g(a) - F_{n+1}(a) \in [-2\delta, 2\delta]$. Definirajmo $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)$. Ta vrsta konvergira enakomerno, saj je $|F(x)| = |\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)| \le |F_0(x)| + \sum_{n=1}^{\infty} |F_n(x)| \le 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(\frac{2}{3})^n = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$. Torej $|F(x)| \le 1$ in zato $F : X \to J = [-1,1]$. Velja tudi $F(a) = f(a) \; \forall a \in A$.

Če J ni kompakten, smemo privzeti, da je zaprtje $\bar{J} = [-1,1]$. Ne tem intervalu po pravkar dokazanem lahko $f : A \to J$ razširimo do zvezne funkcije $G : X \to \bar{J}$. Naj bo $B = G^{-1}(\bar{J} \setminus J)$. Če je $B = \emptyset$, potem G slika v J in je G iskana razširitev. Če je $B \ne \emptyset$, potem $B \cap A = \emptyset$, saj je $G|_A = f : A \to J$. Torej sta $A, B^{zap} \subseteq X$ neprazni, disjunktni podmnožici, zato obstaja urisonova funkcija $\varphi : X \to [0,1]$, da je $\varphi|_A = 1$ in $\varphi|_B = 0$. Vzemimo $F = \varphi G$, torej $F(x) = \varphi(x) G(x)$. Za $a \in A$ je $F(a) = \varphi(a) G(a) = 1 G(a) = G(a) = f(a) \in J$ in F slika v J, saj se točke, ki se z G ne preslikajo v J, z F preslikajo v $\{0\}$.

2.3 Normalnost in kvocienti

Normalnost se ohranja pri nekaterih zlepkih.

Izrek 2.4. *Če sta $(X, \mathcal{O}_X)$ in $(Y, \mathcal{O}_Y)$ normalna topološka prostora, $A^{zap} \subseteq X$ in $f : A \to Y$ zvezna preslikava, potem je zlepek $X \cup_f Y$ normalen topološki prostor.*

Dokaz: Označimo s $q : X + Y \to X \cup_f Y$ kvocientno projekcijo. Netrivialni člani dekompozicije so $\{y\} \cup f^{-1}(y), y \in f(A)$. Preverimo najprej T_1. Kvocient je T_1 natanko tedaj, ko so vsi ekvivalenčni razredi v $X+Y$ zaprti. Ker sta $X, Y \in T_1$, so trivialni razredi zaprti. Netrivialen razred $\{y\} \cup f^{-1}(y) \subseteq X + Y, y \in f(A) \subseteq Y$ je zaprt, saj je $\{y\}^{zap} \subseteq Y$ ter zaradi zveznosti preslikave f $f^{-1}(y)^{zap} \subseteq A$ ter s predpostavko $A^{zap} \subseteq X$ $f^{-1}(y)^{zap} \subseteq X$. Za dokaz T_4 si bomo pomagali z urisonovo lemo. Izberimo zaprti disjunktni neprazni množici $B, C^{zap} \subseteq X \cup_f Y$.

Označimo: $B_X = q^{-1}(B) \cap X \quad C_X = q^{-1}(C) \cap X \quad B_Y = q^{-1}(B) \cap Y \quad C_Y = q^{-1}(C) \cap Y$. X in Y sta normalna, torej obstajata urisonovi funkciji za B_X in C_X ter B_Y in C_Y. Pri $X \cup_f Y$ se del prostora X in Y zlepi in tam morata imeti funkciji isti vrednosti, da lahko določata funkcijo na zlepku. Začnemo na Y in razširimo funkcijo na X. Za $B_Y, C_Y^{zap} \subseteq Y$ obstaja urisonova funkcija $\varphi_Y : Y \to [0,1] \quad \varphi_Y|_{B_Y} = 0 \quad \varphi_Y|_{C_Y} = 1$.

Definirajmo funkcijo $\psi : B_X \cup C_X \cup A \to [0,1]$.

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in B_X \\ 1 & ; x \in C_X \\ \varphi_Y(f(x)) & ; x \in A \end{cases}$$

ψ je zvezna, saj so vsi trije predpisi zvezni in definirani na zaprtih podmnožicah ter se na presekih ujemajo. Če je $x \in A \cap B_X$, potem je v zlepku $f(x) \in Y$ in $f(x) \in B \subseteq X \cup_f Y$, torej $f(x) \in B_Y$. Tedaj je $\varphi_Y(f(x)) = 0$, kar se tudi ujema s predpisom $\psi|_{B_X} = 0$. Podobno za $x \in A \cap C_X$. Po Tietzejevem izreku obstaja zvezna razširitev $\varphi_X : X \to [0,1]$ za ψ. Funkciji φ_X in φ_Y skupaj določata funkcijo φ na $X \cup_f Y$, ki je iskana urisonova funkcija.

$$\begin{array}{ccc} X+Y & \overset{\varphi_X+\varphi_Y}{\to} & [0,1] \\ & \exists\varphi & \\ \downarrow & \nearrow & \\ X\cup_f Y & & \end{array}$$

$\varphi_X + \varphi_Y$ inducira preslikavo φ natanko tedaj, ko ekvivalentne točke preslika v isto vrednost. Poglejmo netrivialne razrede oblike $\{y\} \cup f^{-1}(y)$. Pri nekem $y \in f(A)$ je za poljuben $x \in f^{-1}(y) \subseteq A \subseteq X$ $\varphi_X(x) = \psi(x) = \varphi_Y(f(x)) = \varphi_Y(y)$. Sledi, da je φ zvezna funkcija. Očitno $\varphi|_B = 0$ in $\varphi|_C = 1$.

$\circ$ $\mathbb{R}\mathrm{P}^n = B^n/_{x\sim -x \ x\in S^{n-1}}$ $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ je zlepek B^n in $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$ $\quad \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1} \approx S^{n-1}/_{S^0}$

$\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$ je kvocient S^{n-1}, kjer identificiramo pare antipodnih točk. Naj bo $q : S^{n-1} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$ kvocientna projekcija. Torej q identificira pare antipodnih točk.

$\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ dobimo iz B^n tako, da identificiramo pare antipodnih točk v robni $(n-1)$-sferi S^{n-1}. To lahko naredimo tako, da B^n prilepimo na $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$ vzdolž $S^{n-1} \subseteq B^n$ s kvocientno projekcijo $q : S^{n-1} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$. Torej je $\mathbb{R}\mathrm{P}^n \approx B^n \cup_q \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$.

Trditev 2.5. *Vsi $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ so normalni topološki prostori.*

Dokaz: $\mathbb{R}\mathrm{P}^1 \approx S^1$ je normalen prostor. B^n je normalen prostor. Zlepek normalnih prostorov pri zvezni preslikavi definirani na zaprti podmnožici je normalen.

3 Ekstenzorji in retrakti

Motivacija za to pride iz Tietzejevega izreka.

Naj bosta $(X, \mathcal{O}_X)$ in $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološka prostora. Zanima nas, pri kakšnih pogojih lahko poljubno zvezno preslikavo definirano na podmnožici A topološkega prostora X razširimo do zvezne preslikave na X. Imamo torej $f : A \to Y$ in nas zanima, če obstaja $F : X \to Y$.

Smiselno se je omejiti na $A^{zap} \subseteq X$.

Definicija 3.1. *Topološki prostor $(Y, \mathcal{O}_Y)$ je absolutni ekstenzor za razred topoloških prostorov $\mathcal{R}$, če za vsak $X \in \mathcal{R}$, vsako $A^{zap} \subseteq X$ in $f : A \to Y$ zvezno preslikavo, obstaja zvezna razširitev $F : X \to Y$ za f, da je $F|_A = f$. Pri tem je $Y \in \mathrm{AE}(\mathcal{R})$.*

Če je $\mathcal{N}$ razred normalnih prostorov, $J \subseteq \mathbb{R}$ interval, potem je $J \in \mathrm{AE}(\mathcal{N})$.

Trditev 3.2. *Če je $Y \in \mathrm{AE}(\mathcal{R})$ in $Y \approx Y'$, potem je $Y' \in \mathrm{AE}(\mathcal{R})$. Če je $\{Y_\lambda \ ; \ \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathrm{AE}(\mathcal{R})$, potem je $\prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda \in \mathrm{AE}(\mathcal{R})$.*

Trditev 3.3. $I^2, I^n, I^{\mathbb{N}}, B^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n_+ \in \mathrm{AE}(\mathcal{N})$

Dokaz: $I \in \mathrm{AE}(\mathcal{N}) \Rightarrow B^n \approx I^n$.

Definicija 3.4. *Naj bo $A \subseteq X$. Rečemo, da je zvezna preslikava $r : X \to A$ retrakcija, če je $r|_A = id_A$. Če obstaja kakšna retrakcija iz X na A, rečemo, da je A retrakt topološkega prostora X.*

$\circ$ Naj bo $(X, \mathcal{O})$ poljuben topološki prostor in $A = \{a\} \subseteq X$. A je retrakt. Preslikava $r : X \to A \quad x \mapsto a$ je očitno zvezna in velja $r(a) = a$, torej je retrakcija.

$\circ$ $S^{k-1} \subset \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ je retrakt prostora $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$. Preslikava $r : \mathbb{R}^k \setminus \{0\} \to S^{k-1} \quad x \mapsto \frac{x}{||x||}$ je zvezna in za $x \in S^{k-1}$ velja $||x|| = 1$, torej $r(x) = x$, torej je retrakcija.

$\circ$ $S^k_+ = \{(x_1,x_2,\dots,x_{k+1}) \in S^k \subset \mathbb{R}^{k+1} \; ; \; x_{k+1} \geq 0\}$ je retrakt S^k. Preslikava $r : S^k \to S^k_+$ je retrakcija.
$r(x) = \begin{cases} x & ; x \in S^k_+ \\ (x_1,x_2,\dots,-x_{k+1}) & ; x \in S^k_- \end{cases}$

$\circ$ Ali je S^{k-1} retrakt $\mathbb{R}^k$? Zdi se, da ni.

$\circ$ Poišči vse retrakcije iz $[0,1]$ na $\{0,1\}$. Denimo, da obstaja retrakcija $r : [0,1] \to \{0,1\}$. Ker je interval $[0,1]$ povezan in je preslikava r zvezna, je slika povezana, torej vsebovana v $\{0\}$ ali $\{1\}$, kar pa je protislovje z obstojem retrakcije.

Trditev 3.5. *1. Če je X (s potmi) povezan, potem je vsak njegov retrakt (s potmi) povezan.*

2. Če je X kompakten topološki prostor, potem je vsak njegov retrakt kompakten.

3. Če je $X \in T_2$ in je A retrakt topološkega prostora X, potem je $A^{zap} \subseteq X$.

Dokaz: A je incidenčna množica za zvezni preslikavi $id : X \to X$ in retrakcijo $r : X \to A \hookrightarrow X$. Preslikavi r in id se ujemata natanko v točkah iz A. A je incidenčna množica v prostoru T_2 in je zato zaprta.

Trditev 3.6. *Če je $Y \in \mathrm{AE}(\mathcal{R})$ in je B retrakt Y, potem je $B \in \mathrm{AE}(\mathcal{R})$.*

Dokaz: Dokazujemo, da je B absolutni ekstenzor za razred topoloških prostorov $\mathcal{R}$.Izberemo poljuben $X \in \mathcal{R}$, $A^{zap} \subseteq X$ in zvezno preslikavo $f : A \to B$. Poiskati moramo zvezno razširitev $F : X \to B$ za f. $g : A^{zap} \subseteq X \xrightarrow{f} B \xhookrightarrow{i} Y$ Ker je $Y \in \mathrm{AE}(\mathcal{R})$, obstaja zvezna razširitev $G : X \to Y$ za g, da velja $G|_A = g = i \circ f$. Ker je B retrakt Y, obstaja retrakcija $r : Y \to B$, ki je zvezna, in velja $r|_B = id_B$. Vzamemo $F = r \circ G$, ki je zvezna preslikava, saj je kompozitum dveh zveznih preslikav. Za $a \in A$ velja $F(a) = r(G(a)) = r(g(a)) = r(f(a)) = f(a)$.

$\circ$ "Y"$\in \mathrm{AE}(\mathcal{N})$, saj je $B^2 \approx I^2 \in \mathrm{AE}(\mathcal{N})$ in "Y"je retrakt B^2.

Definicija 3.7. *Y je absolutni retrakt za razred topoloških prostorov $\mathcal{R}$, če velja:*

1. $Y \in \mathcal{R}$

2. Za vsak $X \in \mathcal{R}$ in vsako zaprto vložitev $\varphi : Y \to X$ je $\varphi(Y)$ retrakt prostora X

Tedaj je $Y \in \mathrm{AR}(\mathcal{R})$.

Trditev 3.8. $\mathcal{R} \cup \mathrm{AE}(\mathcal{R}) \subseteq \mathrm{AR}(\mathcal{R})$

Dokaz: Izberimo poljuben $Y \in \mathcal{R} \cup \mathrm{AE}(\mathcal{R})$. Dokazujemo, da je $Y \in \mathrm{AR}(\mathcal{R})$. Izberimo poljuben $X \in \mathcal{R}$ in poljubno zaprto vložitev $\varphi : Y \to X$. Označimo $B = \varphi(Y)^{zap} \subseteq X$. Ker je Y absolutni ekstenzor za razred topoloških prostorov $\mathcal{R}$ in $B \approx Y$ je $B \in \mathrm{AE}(\mathcal{R})$. Tedaj obstaja zvezna preslikava $r : X \to B$ kot razširitev za id, da velja $r|_B = id_B$. r je iskana retrakcija iz X na $\varphi(Y)$. $B^{zap} \subseteq X \xrightarrow{id} B$

$\circ$ Naj bo $J \subset \mathbb{R}$ poljuben interval, potem je $J \in \mathcal{N} \cup \mathrm{AE}(\mathcal{N} \subseteq \mathrm{AR}(\mathcal{N})$. Če ga vložimo kot zaprto podmnožico v nek normalen prostor, potem je slika te vložitve retrakt. $J = [0,\infty) \hookrightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \quad t \mapsto e^{(1+i)t}$ $\varphi(J) \subseteq \mathbb{R}^2$ je zaprta.